

УДК 001.89.57

О СУЩЕСТВОВАНИИ ОБЩЕГО РАВНОВЕСИЯ В ДИСКРЕТНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ. I.

С.И.ГАМИДОВ

Бакинский Государственный Университет

sabir818@yahoo.com

В работе рассматривается дискретная динамическая модель экономической динамики, являющейся обобщением моделей типа Эрроу-Дебре и моделей с неравновесными ценами. Примерами показаны, что к обобщенной модели равновесия сводятся модели Эрроу- Дебре, модель чистого обмена, модель с заданной функцией цен и др.

Ключевые слова: дискретные модели экономической динамики, модели с конечным временем, модели чистого обмена, неравновесные цены

1. Описание равновесной модели с конечным дискретным временем

Пусть рассматривается экономика

$$E = \langle T, m, G, p(x), n, (R_+^m, \geq_j^t(x)), F_j^t(x) \rangle,$$

обозначения в которой имеют следующий смысл:

T -количество моментов времени $t = 1, \dots, T$, для которых рассматривается функционирование экономики, причем T конечно;

m -количество продуктов, $i = 1, \dots, m$, в каждой момент $t = 1, \dots, T$,

$G \subset R_+^{Tm} \times R_+^{Tm}$ -технологическое множество.

Для любого $(y, x) \in G$ будет обозначать

$$(y, x) = (y(1), \dots, y(T), x(1), \dots, x(T)),$$

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)), \quad t = 1, \dots, T,$$

$$x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t)), \quad t = 1, \dots, T,$$

$$x^i(t) = (x_1^i(t), \dots, x_e^i(t)), \quad i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T.$$

Пусть

$$P_r G = \{x / (y, x) \in G, \exists y\}, G(x) = \{y / (y, x) \in G\}.$$

Множество G предполагается компактным, а множество $G(x)$ выпуклым для произвольного $x \in P_r G$.

Далее, $p(x)$ – непрерывная вектор-функция цен, $p: P_r G \rightarrow R_+^{Tm}$. Для вектора $p(x)$ будем обозначать

$$p(x) = (p'(x), \dots, p^T(x)), \quad p^t(x) = (p_1^t(x), \dots, p_m^t(x)), \quad t = 1, \dots, T.$$

Предположим, что для любых $(y, x) \in G$ $(y', x) \in G$ и любого вектора $p(x)$ удовлетворяется следующее условие:

$$\langle p^t(x), y(t) \rangle = \langle p^t(x), y'(t) \rangle, \quad t = 1, \dots, T.$$

В модели имеется n потребителей, $j = 1, \dots, n$. Как обычно, $(R_+^m, \geq_j^t(x))$ – поле предпочтений j -го потребителя в момент t , $j = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$. Отношение предпочтения потребителя $\geq_j^t: P_r G \rightarrow 2^{R_+^m \times R_+^m}$ предполагается замкнутым отображением на множестве $P_r G$, $j = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, причём для каждого $x \in P_r G$ отношение предпочтения $\geq_j^t(x)$ является полным на R_+^m рефлексивным транзитивным ненасыщаемым. Следует отметить, что из замкнутости отображения $\geq_j^t(x)$ следует непрерывность отношения предпочтения $\geq_j^t(x)$ для любого $x \in P_r G$. Кроме того, предположим, что отношение предпочтения $\geq_j^t(x)$ строго выпукло для любого $x \in P_r G$, т.е. если для любых $v^1, v^2 \in R_+^m$ имеет место $v^1 \geq_j^t(x) v^2$, то и

$$\alpha v^1 + (1 - \alpha) v^2 \succ_j^t(x) v^2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T.$$

Через $F_j^t(x)$ обозначена бюджетная функция потребителя j в момент t , $F_j^t: P_r G \rightarrow R_+^1$, $j = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$, которая предполагается непрерывной на множестве $P_r G$ и удовлетворяющей условию

$$\sum_{j=1}^n F_j^t(x) = \langle p^t(x), y(t) \rangle, \quad \forall (y, x) \in G, \quad t = 1, \dots, T.$$

Несколько слов об экономической интерпретации множества G . Вектор $(y, x) \in G$ – это пара выпуск – затраты, т.е. число $y_i(t)$ – количество i -го продукта, произведённого в момент t , а $x^i(t)$ – l мерный вектор ресурсов, предназначенных для производства i -го продукта в момент t . Как видно из ниже следующих примеров, это довольно общая интерпретация может иметь несколько вариантов.

Пример 1. В каждый момент времени t производитель располагает некоторым m – мерным вектором ресурсов $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t)) > 0$, состоящий из собственного запаса $z(t) \geq 0$ и импорта $y(t) > 0$, т.е.

$$X(t) = Z(t) + Y(t), \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

причем векторы $x(1)$ и $y(t)$, $t = 1, \dots, T$, фиксированы. Для производства i -го

продукта в момент t выделяется m – мерный вектор ресурсов $x^i(t) \geq 0$, $j = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T$. Количество произведенного i -го продукта задаётся непрерывной функцией $w_i^t : R_+^m \rightarrow R_+$. В производство вовлекаются все ресурсы $x(t)$, т.е.

$$\sum_{i=1}^m x^i(t) = X(t), \quad t = 1, \dots, T. \quad (2)$$

Следовательно, весь произведённый продукт в момент t при распределении ресурсов $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t))$ равен вектору $W^t(x(t)) = (w_1^t(x^1(t)), \dots, w_m^t(x^m(t)))$. Для потребления в момент t выделяется часть $V^t(x(t))$ произведенного продукта $W^t(x(t))$,

$$V^t(x(t)) = A(t)W^t(x(t)),$$

где

$$A(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_m(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \alpha_i(t) \leq 1, \quad i = 1, \dots, m,$$

$-m$ – мерная диагональная матрица. Остальная часть продукта $B(t)W^t(x(t))$, где

$$B(t) = \begin{pmatrix} \beta_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_m(t) \end{pmatrix}, \quad \beta_i(t) = 1 - \alpha_i(t), \quad i = 1, \dots, m,$$

является собственным запасом производителя в момент $t + 1$:

$$Z(t + 1) = B(t)W^t(x(t)), \quad t = 1, \dots, T - 1. \quad (3)$$

Сопоставляя (1) и (3), имеем

$$X(t + 1) = B(t)W^t(x(t)) + Y(t + 1), \quad t = 1, \dots, T - 1.$$

Определение 1. Tm^2 – мерный вектор $x = (x(1), \dots, x(T))$ называется траекторией распределения, если выполняются соотношения (1), (2) и (3).

Обозначим множество всех траекторий распределения через L . Тогда можно положить

$$G = G_r V,$$

где $G_r V$ график вектор-функции $V(x) = (V^1(x(1)), \dots, V^t(x(t)))$ на множестве L .

Пример 2. Предположим, что для нужд производства в каждый момент t выделяется сумма $K(t) > 0$ капитальных вложений. m – мерный вектор

$c(t) = (c_1(t), \dots, c_m(t))$ назовём распределением капитальных вложений, если

$$\sum_{i=1}^m c_i(t) = K(t), \quad i=1, \dots, T.$$

Число $c_i(t) > 0$ показывает количество денег, выделенных i -му производителю. Пусть $C(t)$ – множество всех распределений капитальных вложений:

$$C(t) = \left\{ c(t) \left| \sum_{i=1}^m c_i(t) = K(t) \right. \right\}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Технологическое множество (множество наборов выпусков продукции) в момент t задаётся для каждого производителя i ($i = 1, \dots, m$) отображением $f_i^t : C(t) \rightarrow 2^{R_+^m}$, $t = 1, \dots, T$. Предположим также, что каждый производитель располагает строго выпуклым полным транзитивным рефлексивным непрерывным полем предпочтений (R_+^m, \geq_i^t) , $i = 1, \dots, m$, $t = 1, \dots, T$, и при заданном распределении $c(t)$ выбирает наиболее предпочтительный элемент из множества $f_i^t(c(t))$. Процесс выбора этого элемента можно представить как отображение $V_i^t : C(t) \rightarrow R_+^m$,

$$V_i^t(c(t)) = \left\{ \bar{w}(c(t)) \left| \bar{w}(c(t)) \geq_i^t w, \forall w \in f_i^t(c(t)) \right. \right\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad t = 1, \dots, T.$$

Следует отметить, что ввиду строгой выпуклости поля предпочтений (R_+^m, \geq_j^t) наиболее предпочтительный элемент будет единственным для всех $t = 1, \dots, T$. В данном случае можно положить:

$$G = G_r V,$$

где $G_r V$ - график отображения $V(c) = (v^1(c(1)), \dots, v^T(c(T)))$, $v^t(c(t)) = \sum_{i=1}^m v_i^t(c(t))$, $t = 1, \dots, T$,

на множестве $C = \prod_{t=1}^T C(t)$. Поведение потребителя в нашей модели E определяется в “классическом” смысле. В каждый момент времени $t = 1, \dots, T$ определим множество элементов, удовлетворяющих бюджетному ограничению j -го потребителя $Q_j^t(x)$:

$$Q_j^t(x) = \left\{ v^j(t) \left| \langle p^t(x), v^j(t) \rangle \leq F_j^t(x) \right. \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad x \in P_r G.$$

Целью потребителя при наборе ресурсов $x \in P_r G$ является выбор наиболее предпочтительного элемента из множества $Q_j^t(x)$. Такой выбор описывается отображением

$$\varphi_j^t(x) = \left\{ \bar{v}^j(t) \left| \bar{v}^j(t) \geq_j^t(x) v, \forall v \in Q_j^t(x) \right. \right\}, \quad j = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T.$$

Теперь мы можем привести определение общего равновесия в экономике E .

Определение 2. Пара $(\bar{y}, \bar{x}) \in G$ называется общим равновесием, если

выполнены следующие условия для некоторых $\bar{v}^j(t)$:

1. $\bar{v}^j(t) \in \varphi_j^t(\bar{x})$, $j = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$;
2. $\sum_{i=1}^n \bar{v}^i(t) \leq \bar{y}(t)$, $t = 1, \dots, T$;
3. $\left\langle p^t(\bar{x}), \sum_{j=1}^n \bar{v}^j(t) \right\rangle = \langle p^t(\bar{x}), \bar{y}(t) \rangle$, $t = 1, \dots, T$.

Далее, рассмотрим частный случай экономики E , а именно, статическую модель при $t = 1$. Тогда будем обозначать

$$E_1 = \langle m, G, p(x), n, (R_+^m, \geq_j^t(x)), F_j(x) \rangle.$$

На следующих примерах убедимся, что модель E_1 является обобщением модели Эрроу-Дебре, модели чистого обмена, модели равновесия с фиксированными ценами и квотами на производственное потребление продукции.

Пример 3. (Модель Эрроу-Дебре). Пусть $\prod_m - (m-1)$ -мерный симплекс в R_+^m . Предположим, что целью производителя для любого $x \in \prod_m$ является решение \bar{y} задачи

$$\max_{y \in H} \langle x, y \rangle, \quad (4)$$

где $H \subset R_+^m$ - некоторое компактное множество. Кроме того, пусть

$$F_j(x) = \langle x, a^j \rangle + \alpha_j \langle x, \bar{y} \rangle, \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где a^j - вектор начальной собственности потребителя j , а \bar{y} является решением задачи (4). Если определить поведение потребителя непрерывным выпуклым полем предпочтений (R_+^m, \geq_j) , то нетрудно видеть, что мы имеем модель Эрроу-Дебре.

Преобразуем данную модель в модель E_1 следующим образом. Пусть $p(x) = x$, $x \in \prod_m$, $G = \{(\sum a^j + \bar{y}, k) | x \in \prod_m, \bar{y} \text{ является решением задачи (4)}\}$, $F_j(x)$ определяется равенством (5). Нетрудно видеть, что общее равновесие, определяемое для модели Эрроу-Дебре, совпадает с ее общим равновесием в модели E_1 , данным в определении 2.

Пример 4. (модель чистого обмена). Пусть каждый потребитель j ($j = 1, \dots, n$) с полем предпочтений (R_+^m, \geq_j) имеет вектор начальной собственности $a^j \geq 0$. Задан также симплекс цен \prod_m . Для преобразования этой модели чистого обмена в модель E_1 положим $p(x) = x$, $x \in \prod_m$,

$$G = \left\{ \left(\sum_{j=1}^n a^j, x \right) \mid x \in \prod_m \right\}, F_j(x) = \langle x, a^j \rangle.$$

Очевидно, что равновесие в модели чистого обмена совпадает с равновесием в модели E_1 , данным в определении 2.

Пример 5. Пусть p - фиксированный вектор цен. Предположим, что целью производителя является решение ξ задачи

$$\begin{aligned} \max \langle p, \xi \rangle, \\ \langle \xi, \eta \rangle \in H \subset R_+^m \times R_+^m, \\ \eta \leq x, \end{aligned} \quad (6)$$

где (ξ, η) - пара выпуск - затраты, H - технологическое множество, x - квоты на производственное потребление $x \in L \subset R_+^m$, L - компактное множество. поведение потребителей j ($j = 1, \dots, n$) определяется полем предпочтений (R_+^m, \geq_j) и бюджетами

$$F_j(x) = \alpha_j \langle p, \bar{\xi} \rangle, \quad 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j = 1,$$

$\bar{\xi}$ - решение задачи (6) при данном x .

Определение 3. Пара $(\bar{\xi}, \bar{x}) \in H$ называется равновесием, если существует наиболее предпочтительный элемент v^j j -го потребителя из множества элементов, удовлетворяющих бюджетным ограничениям:

- 1) $\bar{\xi}$ является решением задачи (6) при данном \bar{x} ;
- 2) $\sum_{j=1}^n \bar{v}^j \leq \bar{\xi}$;
- 3) $\left\langle p, \sum_{j=1}^n \bar{v}^j \right\rangle = \langle p, \bar{\xi} \rangle$.

Данная модель преобразуется в модель E_1 , положив $p(x) = p$, $x \in L$, $G = \left\{ (\bar{\xi}, x) \mid x \in L, \bar{\xi} \right\}$ является решением задачи (6) }.

Равновесие модели по определению 3 совпадает с равновесием в модели E_1 по определению 2.

Прежде чем перейти к доказательству существования общего равновесия, приведем несколько определений.

Для множества $X \subset R^n$ через \bar{X} обозначим замыканием множества X , через ∂X - границу множества X , а через X' - множество предельных точек множества X .

Определение 4. Пусть $X \subset R^n, Y \subset R^n$ - некоторые множества. Точечное-множественное отображение $F : x \rightarrow 2^y$ называется стандартным, если:

- 1) отображение F замкнуто,
- 2) для любого $x \in X$ множество $F(x)$ выпукло,
- 3) для любого компакта $X_1 \subset X$ множество $F(x_1)$ компактно.

Определение 5. Множество $X \subset R^n$ называется V -множеством, если внутренность X непуста и выпукла.

Определение 6. Отображение $F: X \rightarrow 2^{R^n}$, заданное на V -множестве $X \subset R^n$ называется регулярным на некотором множестве $X_1 \subset \partial X$, если:

- 1) для любого $x \in X_1 \cap X$ и любого $y \in F(x)$ существует опорная к множеству X в точке x гиперплоскость (p, β) такая, что $\langle p, y \rangle \geq 0$;
- 2) для любых последовательностей $x^s \rightarrow x \in X_1 \setminus X$, $x^s \in X$ и $y^s \in F(x^s)$ существует опорная к множеству X в точке x гиперплоскость такая, что $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \langle p, y^s \rangle > 0$.

Если $X = R_+^n \setminus U$, где $U \subset \partial R_+^n$ и $X_1 \subset \partial R_+^n$, то определение 6 принимает следующий вид.

Определение 6'. Отображение $F: X \rightarrow 2^{R^n}$ регулярно на множестве X_1 , если:

- 1) для любого $x \in X_1 \setminus U$ и любого $y \in F(x)$ существует такой индекс $i \in K(x) = \{i \mid x_i = 0\}$, что $y_i \geq 0$;
- 2) для любых последовательностей $x^s \rightarrow x \in X_1 \cap U$, $x^s \in X$ и $y^s \in F(x^s)$ существует такой индекс $i \in K(x)$, что $\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} y_i^s > 0$.

Теорема 1 ([5]). Пусть $F: X \rightarrow 2^{R^n}$ -стандартное отображение с непустыми образами, заданное на V -множестве $X \subset R^n$ и $X_1 \subset \partial X$. Предположим, что

- 1) отображение F регулярно на X_1 ,
- 2) $(\partial X \setminus X_1) \cap R'_{F, x^0} = \emptyset$,
- 3) множество $R_{F, x^0} = \{x \mid \lambda(x - x^0) \in F(x), \exists \lambda > 0\}$ ограничено при некотором $x^0 \in \text{int } X$.
Тогда $0 \in F(x)$.

Перейдем к непосредственному рассмотрению существования общего равновесия в экономике E .

Пусть $Q_j^t(x)$ -множество элементов, удовлетворяющих бюджетному ограничению потребителя j ($j = 1, \dots, n$) в момент $t = 1, \dots, T$:

$$Q_j^t(x) = \left\{ v^j(t) \mid \langle p^t(x), v^j(t) \rangle \leq F_j^t(x) \right\}, \quad x \in P, G,$$

а $\varphi_j^t(x)$ - отображение спроса потребителя j ($j = 1, \dots, n$), в момент $t = 1, \dots, T$:

$$\varphi_j^t(x) = \left\{ \bar{v}^j(t) \mid \bar{v}^j(t) \geq_j^t(x) v^j(t), v^j(t) \in Q_j^t(x) \right\}, x \in P_r G.$$

Далее пусть $\varphi^t : P_r G \rightarrow 2^{R_+^m}$ сумма отображений φ_j^t :

$$\varphi^t(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j^t(x), t = 1, \dots, T,$$

и $\varphi : P_r G \rightarrow 2^{R_+^{Tm}}$ декартово произведение отображений φ^t :

$$\varphi(x) = \prod_{t=1}^T \varphi^t(x).$$

Через $\Lambda(x)$ будем обозначать отображение избыточного спроса в экономике E , $\Lambda : P_r G \rightarrow 2^{R^{Tm}}$, $\Lambda(x) = \varphi(x) - G(x)$, а через $\tilde{\Lambda}(x)$, $\tilde{\Lambda} : P_r G \rightarrow 2^{R^{Tm}}$, - отображение, которое связано с отображением Λ следующим образом: $\tilde{z} \in \tilde{\Lambda}(x)$, где

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= (\tilde{z}(1), \dots, \tilde{z}(T)), \\ \tilde{z}(t) &= (\tilde{z}^1(t), \dots, \tilde{z}^m(t)), t = 1, \dots, T, \\ \tilde{z}^i(t) &= (\tilde{z}_1^i(t), \dots, \tilde{z}_l^i(t)), i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T \end{aligned}$$

тогда и только тогда, если найдется $z \in \Lambda(x)$, где

$$\begin{aligned} z &= (z(1), \dots, z(T)), \\ z(t) &= (z_1(t), \dots, z_m(t)), t = 1, \dots, T, \end{aligned}$$

такой, что для всех $k = 1, \dots, l$ имеет место

$$\tilde{z}_k^i = z_i(t), \quad i = 1, \dots, m, t = 1, \dots, T.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Браверман Э.М., Левин А.М. Неравновесные модели экономических систем. М.: Наука, 1981, 353с.
2. Никайдо Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М.: Мир, 1972, 517с.
3. Полтерович В.М. Модели равновесного экономического роста // Экономика и математические методы, 1979, т. XII, № 3, с. 527-540.
4. Тимохов А.В. Некоторые теоремы о неподвижной точке. В сб.: Методы функционального анализа в математической экономике. М.: Наука, 1978, с. 98-110.
5. Grandmunt J.M. Temporary general equilibrium theory// Econometrika. 1977, v. 45, № 3, p. 532-572.
6. Дементьев Н.П., Черемиз В.М. Квазистационарные решения в дифференциальных моделях экономики с медленно изменяющимися параметрами.// Сибирский журнал индустриальной математики. 2002. 5, № 2. с. 70-93.
7. Поддубный В.В., Сухарева Е.А. Устойчивость динамической модели рынка вальрасовского типа со многими товарами. // Мат. 5 Всерос. Научно-прак. Конференции. Томск, 2006, ч. 2. с. 127-129.
8. Polyak R.A. Finding generalized Walras-Wald equilibrium.// Math. Funct. Anal. and Topol. 2008, 14, № 3. p. 242-254.
9. Matveenko V.D. Optimal paths in oriented graphs and eigenvectors in max systems. //

**DİSKRET DİNAMİK MODELƏRDƏ
ÜMUMİ TARAZLIĞIN VARLIĞI HAQQINDA. I.**

S.İ.HƏMİDOV

XÜLASƏ

Məqalədə Errou-Debre və qeyri-tarazlıq qiymətli tipli E diskret iqtisadi dinamika modellərinə baxılır; müəyyən şərtlər daxilində E modelində ümumi tarazlığın varlığı isbat olunur.

Açar sözlər: iqtisadi dinamikanın diskret modelləri, sonlu zamanlı modellər, xalis mübadilə modelləri, qeyri-tarazlıq qiymətləri.

**ON THE EXISTENCE OF GENERAL EQUILIBRIUM IN DYNAMIC DISCRETE
MODELS. I.**

S.İ.HAMIDOV

SUMMARY

The article studies the dynamic economic model E which generalizes two groups of models: 1) models of Arrow-Debreu type, 2) models with non-equilibrium prices. In theorem 2 sufficient conditions for the existence of general equilibrium in the model E are presented.

Key words: discrete models of economic dynamics, models with finite time, models of pure exchange, non-equilibrium prices

Поступила в редакцию: 18.02.2011 г.

Принято к печати: 03.10.2011 г.